# Ableitungen und Anwendungen

Die wichtigsten Regeln und Kochrezepte der Differentialrechnung in Kurzform, ohne Erklärung der Gründe warum.

## 1 Definition, Differentienquotient.

**Der Differentienquotient:** Die Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x$ ist definiert als die Steigung des Graphen der Funktion $f(x)$ auf einem unendlich kleinen Stück der $x$ Achse an der Stelle $x$: Mathematisch sieht das so aus:

$$f'(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

Die Ableitung ist eine Operation, die einer Funktion $f(x)$ eine neue Funktion $f'(x)$ zuordnet.

$$f(x) \overrightarrow{Ableitung} f'(x) \tag{2}$$

Die Ableitung $f'(x)$ gibt an, was für eine Steigung die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x$ hat. Die *zweite* Ableitung $f''(x)$ gibt an, was für eine Steigung die Funktion $f'(x)$ an der Stelle $x$ hat. usw.

**Beispiel zum Quotienten** : $f(x) = x^2$.

$$(x^2)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \tag{3}$$

Das $x^2$ fällt mit $-x^2$ raus, und nachdem man $h$ ausgeklammert hat, kann man es kürzen:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x \tag{4}$$

Die Ableitung von $f(x) = x^2$ ist also $2x$.

## 2 Die wichtigsten Rechenregeln:

Seien $l$ und $s$ zwei Zahlen, die nicht von $x$ abhängig sind.

**Linearität:**

$$\Big(s \cdot f(x)\Big)' = s \cdot f'(x) \tag{5}$$

$$\Big(s \cdot f(x) + l \cdot g(x)\Big)' = s \cdot f'(x) + l \cdot g'(x) \tag{6}$$

**Produktregel:**

$$\Big(f(x) \cdot g(x)\Big)' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \tag{7}$$

**Quotientenregel:**

$$\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{8}$$

**Kettenregel: innere Ableitung**

$$\Big[f\Big(g(x)\Big)\Big]' = f'\Big(g(x)\Big) \cdot g'(x) \tag{9}$$

Bem.: Aus der Gleichung 7 folgt in der Integrationsrechnung die Methode der partiellen Integration, aus der Gleichung 9 die Regel der Integration durch Substitution. Die Gleichung 9, vor allem ihre mehrdimensionale Version, ist in der ganzen Mathematik und Physik sehr wichtig; eine der wichtigsten, sogar.

**inverse (umgekehrte) Funktion** Sei $y := f(x)$, und $f^{-1}(y) = x$ deren inverse Funktion. Dann gilt:

$$(f^{-1})'(y) = (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \tag{10}$$

$f^{-1}(y) = x$ erhält man am einfachsten, indem man $y := f(x)$ nach $x$ auflöst.

# 3 Die wichtigsten Ableitungen.

$$\Big(x^n\Big)' = n \cdot x^{n-1} \tag{11}$$

$$\Big(\sin(x)\Big)' = \cos(x) \tag{12}$$

$$\Big(\cos(x)\Big)' = -\sin(x) \tag{13}$$

$$\Big(\frac{1}{x}\Big)' = \frac{-1}{x^2} \tag{14}$$

$$\Big(\sqrt{x}\Big)' = \Big(x^{\frac{1}{2}}\Big)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{15}$$

$$\Big(\tan(x)\Big)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x \tag{16}$$

$$\Big(\cot(x)\Big)' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -(1+\cot^2 x) \tag{17}$$

$$\Big(\exp x\Big)' = \exp x \tag{18}$$

$$\Big(a^x\Big)' = a^x \cdot \ln a \tag{19}$$

$$\Big(\ln|x|\Big)' = \frac{1}{x} \tag{20}$$

### 3.1 Taschenrechner HP48G

Der Taschenrecher kann symbolisch ableiten. Dazu gibt man die Gleichung mit EQUATION symbolisch ein, z.B. $x^2$. Anschliessend gebe man die Variable an, nach der abgeleitet werden soll, z.B. $x$. Dann drücke man $\partial$ . Mit ▼ kann man das Ergebnis schön anschauen.

## 4 Kurvendiskussion

Ist eine Funktion an einer Stelle $x$ extremal, folgt daraus, dass die Ableitung an der Stelle $x$ gleich Null ist. Aber nicht umgekehrt.

$$f(x)\,extremal \quad \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{array} \quad f'(x) = 0 \tag{21}$$

Ist die Ableitung nämlich Null, muss die Fuktion nicht unbedingt extremal sein. Ist die Ableitung aber nicht Null, weiss man, dass die Funktion nicht extremal ist.
Eine solche Bedingung heisst *notwendig* aber nicht *hinreichend*. Es ist notwendig, dass die Ableitung Null ist, aber es genügt nicht.

#### Hinreichende Bedingungen

**Maximum** : $f(x)$ maximal an der Stelle $x$ genau dann wenn

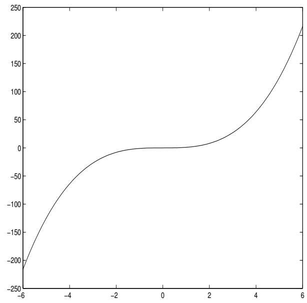
$$f'(x) = 0\,und\,f''(x) < 0 \tag{22}$$

**Minimum** : $f(x)$ minimal an der Stelle $x$ genau dann wenn

$$f'(x) = 0\,und\,f''(x) > 0 \tag{23}$$

Man Spricht von *Extremum*, wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$.

Abbildung 1: $x^3$ hat bei $x = 0$ einen Terassenpunkt




**Terassenpunkt** : $f(x)$ hat Terassenpunkt an der Stelle $x$ genau dann wenn

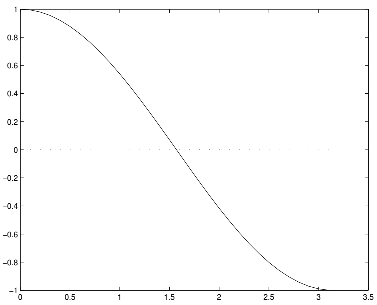
$$f'(x) = 0 \, und \, f''(x) = 0 \tag{24}$$

Hier hat man ein $f'(x) = 0$ ohne Extremalstelle !! Die Kurve ändert die Richtung ihrer Krümmung an einer horizontalen Stelle. cf. Abb. 4.

**Wendepunkt** : $f(x)$ hat Wendepunkt an der Stelle $x$ genau dann wenn

$$f'(x) \neq 0 \, und \, f''(x) = 0 \tag{25}$$

Abbildung 2: $cos(x)$ hat beim Schnittpunkt mit der x-Achse einen Wendepunkt




Die Kurve ändert hier die Richtung ihrer Krümmung, ohne dass es ein Terassenpunkt ist. cf Abb. 4. Die Kurve ist dort nicht horizontal. (Der Terassenpunkt ist ein Spezialfall eines Wendepunktes.)