Crashkurs für Gaussalgorithmus

Rémy Schumm, für KI 1b

17. Februar 2000

Ein Verfahren, um lineare Gleichungssysteme aufzulösen.

1 Definitionen

lineares Gleichungssystem Ein lineares Gleichungsystem mit n Gleichungen und n Unbekannten x sieht so aus:

$$\left\| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\| \tag{1}$$

Das Gleichungssystem kann auch in Matrixform dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

oder kurz

$$Ax = b \tag{3}$$

Das ist eigentlich “nur” eine andere Schreibweise.

2 Ziel

Man löst nun das Gleichunsystem, indem man es in die Form

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

bringt, und nachher rückwärts auflöst:
Aus der letzten Zeile kann man x_n ausrechnen. Han man aber x_n, kann man mit der zweitletzten Zeile x_{n-1} ausrechnen; etc...
Die Gleichungssysteme 4 und 2 haben die gleiche Lösung $x_1 \dots x_n$. (Nein, das beweise ich *nicht*.)

3 Vorgehen

Das Vorgehen ist eigentlich das gleiche, wie wenn man ein Gleichungsystem von Hand löst:
Man nimmt Zeilen von A und b, multipliziert sie mit geeigneten Faktoren und zählt sie voneinander ab bzw. addiert sie:
Weil das mit Indexen und so recht kompliziert ist [1] und ich es auch nicht mehr so genau weiss (und mein LaTeX 2ε Compiler sowieso heute dauernd auf die Nase fällt [2], was aber an mir liegt), mache ich einfach ein

Beispiel: Gegeben sei das $3 \cdot 3$ Gleichungssystem

$$\left\| \begin{array}{l} 1x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 = 1 \end{array} \right\| \tag{5}$$

was also folgendem A und b entspricht:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ich nehme nun Zeile 1 mit 2 multipliziert und ziehe die zweite davon ab: Das Ergebnis schreibe ich in die 2. Zeile:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Das gleiche mit Zeile 1 mit 3 multiplieziert und die dritte abziehen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

[1] aber wir dürfen das sicher mal im Java programmieren
[2] wie auingtob immer sagt

Nun das gleiche mit den beiden letzten Zeilen: Zeile 2 mit 2 multiplieren, Zeile 3 davon abziehen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Wir haben unser System 5 also in die folgende Form gebracht:

$$\left\| \begin{array}{r} 1x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_2 + 6x_3 = 1 \\ 2x_3 = 0 \end{array} \right\| \tag{10}$$

Das kann man nun einfach lösen, indem man rückwärts einsetzt: man erhält:

$$\left\| \begin{array}{c} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \\ x_3 = 0 \end{array} \right\| \tag{11}$$

Und nun gehe ich schlafen.

Typeset in LaTeX 2ε using OzTeX4.0 on iBook.
Quellcode: gauss.tex
nach: Prof. Jürg Marti, Numerische Mathematik I (2.1, Ordner V), ETH Zürich, 199?