Integrale

Die wichtigsten Regeln.

1 Grundeigenschaften, Linearität.

Vertauschen der Integrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \tag{2}$$

Linearität:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \tag{3}$$

$$\int \Big[k \cdot f(x) + l \cdot g(x)\Big]dx = k \cdot \int f(x)dx + l \cdot \int g(x)dx \tag{4}$$

2 Integrations-Rechenregeln.

Sie $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, $G(x)$ von $g(x)$: Es gelte also $F'(x) = f(x)$ bzw. $\int f(x)dx = F(x) + const$ etc.

Partielle Integration:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx \tag{5}$$

Integration durch Substitution:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + const \tag{6}$$

Bem.: Die Gleichungen **??** ist das Pendant zur Produktregel in der Ableitungstheorie, bzw. Gleichung **??** zur Kettenregel ("innere Ableitung").

3 Hauptsatz der Infinitesimalrechung.

Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung sagt etwa: Das Integral ist die Umkehrung der Ableitung. Also: leitet man eine Funktion ab, und integriert sie dann, bekommt man wieder das gleiche. Und umgekehrt auch. Formal (mit Integrationsgrenzen) sieht das so aus:

$$const + F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x) \equiv F'(x) = f(x) \tag{7}$$

Und umgekehrt:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F(x) \underbrace{-F(a)}_{=-const} \tag{8}$$

4 Einige wichtige Stammfunktionen:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + const \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + const \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + const \tag{11}$$

$$\int e^x dx = e^x + const \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + const \tag{13}$$

Im Übrigen soll man immer auf die Listen der Ableitungsrechung zurückgreifen: Bsp.: Es soll $\int \cos x dx$ berechnet werden: Man weiss:

$$\sin' x = \cos x \tag{14}$$

aus der Differentialrechung. Will man also das Integral von $\cos x$ berechnen, lese man **??** rückwärts und erhaltet:

$$\int \cos x dx = \sin x + const \tag{15}$$

Das funktionniert mit allen bekannten Ableitungen. Weiss man also, dass eine zu integrierende Funktion die Ableitung von etwas ist, ist dieses Etwas die Lösung des Integrals.
als LaTeX- Übung, ©rs März 1997, rschumm@g26.ethz.ch