# Vollständige Induktion am Beispiel der Summe der natürlichen Zahlen.

Rémy Schumm, für KI 1b

8. Februar 2000

Zusammenfassung des ersten Beispiels von Pfenniger.

## 1 Definitionen

Sei

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n \tag{1}$$

die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis $n$. $s_n$ ist gegeben durch die Rekursion:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s_n & = & s_{n-1} + n \\ s_0 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} s_{n+1} & = & s_n + n + 1 \\ s_0 & = & 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

## 2 Behauptung / Satz

**Satz:** Es gilt die explizite Formel für $s_n$:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

Die Aufgabe ist es nun, diese Formel 3 zu beweisen.

## 3 Beweis durch vollständige Induktion

### 3.1 Plan und Überlegungen:

#### 3.1.1 Verankerung

Als erstes wird bewiesen, dass die $s_n$ für irgend ein $n$ gilt, z.B. für $n = 0$ oder so. Dann sind wir sicher, dass es irgendwo mal stimmt.

### 3.1.2 Induktionsschritt

Als zweites nehmen wir an (=Induktionsannahme), wir hätten die Formel 3 für irgendein $n$ schon bewiesen, z.B. für $n = 57$. Wenn wir nun beweisen können, dass die Formel 3, die aufgrund der (Induktions-)annahme für $n$ schon gilt, auch für $n + 1$ gilt, haben wir die ganze Geschichte bewiesen.
Nämlich: Für $n = 0$ ist die Sache ja eh ok. Mit dem Induktionsschritt beweisen wir aber, dass 3 für $n = n + 1 = 0 + 1 = 1$ auch gilt. Aber dann gilt sie auch für $n = 3$ etc. etc. $\Rightarrow$ die Formel 3 gilt $\forall n \in \mathbb{N}$.

## 3.2 Durchführung

Beweis der Formel 3:

### 3.2.1 Verankerung

Sei $n = 0$, wir überprüfen die Formel 3:

$$s_0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0 \tag{4}$$

...und das steht ja schon in der Definition 2, also ist die Verankerung gegessen.

### 3.2.2 Induktionsschritt

**Induktionsannahme:** Wir nehmen an, Formel 3 gelte für irgendein $n$, also z.B., weil wir ja schliesslich bei Herrn Pfenniger Schule haben, bei $n = 57$:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{5}$$

**Iduktionsbehauptung:** Wir wollen nun zeigen, dass 3 auch für $n+1$ gilt, also:

$$s_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{6}$$

**Beweis der Induktionsbehauptung:** Nach der Definition unserer $s_n$ (Formel 2) gilt ja:

$$s_{n+1} = \underbrace{s_n}_{ersetzen} + n + 1 = \tag{7}$$

Ich ersetze $s_n$ durch den Ausdruck in der Induktionsannahme 5:

$$= \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{s_n} + n + 1 = \tag{8}$$

Mit ein Bisschen Umformen ist das aber:

$$= \frac{n(n+1)+2n+2}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \tag{9}$$

Durch Faktorisierung (bzw. Schielen auf Gleichung 6) sieht man, dass das gleich folgendem ist:

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{10}$$

Das ist nun aber, was wir in der Behauptung 6 beweisen wollten. Damit ist nun also unsere Induktionsbehauptung bewiesen, damit der Induktionsschritt, und damit die ganze Induktion.
Wir haben bewiesen, dass die explizite Formel 3 für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Typeset in LaTeX 2ε using OzTeX2.1 on PowerMacintosh G3.
Quellcode: vollInd.tex